ECOLE DE L'AIR 1979

Option 1ère épreuve de MATHEMATIQUES M-P (3 heures)

## PROBLEME 1

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère affine on considère les trois plans $(P_1)$, $(P_2)$ et $(P_3)$ d'équations :

$$\begin{array}{ll} (P_1) & x + aby + z = b \\ (P_2) & x + by + az = 1 \\ (P_3) & ax + by + z = 1 \end{array} \qquad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

I. Suivant les valeurs du couple (a,b) établir les intersections de ces plans 2 à 2 et déterminer les éventuels points communs aux 3 plans.

II. On envisage maintenant l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé et l'on pose :

$$(a, b) = (-2, -2)$$

Soit $(\Delta)$ la droite intersection de $(P_1)$ et $(P_2)$.

Former l'équation du plan (P) contenant $(\Delta)$ et orthogonal à $(P_1)$.

III. Soit d un réel positif donné.

Etablir l'équation de la surface, ensemble des points dont la distance à $(\Delta)$ est d.

Vérifier que c'est bien l'équation d'une surface cylindrique de génératrices parallèles à $(\Delta)$.

## PROBLEME 2

Soit (E) l'ensemble des matrices carrées (n,n) muni de sa structure d'algèbre ( $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, anneau). On pose :

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (n lignes)} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \; U_{ij} = 1 \;\; \forall (i,j), \; U \in (E)$$



I. Soit S une matrice telle que : $(\exists \lambda \in \mathbb{R})$ ; $S.C = \lambda.C$

Caractériser une telle matrice.

Etablir l'équivalence :

$$S.C = \lambda.C \iff S.U = \lambda.U$$

II. Soit $(E_1)$ l'ensemble des matrices S.

1. Montrer que :

$$I \in (E_1) \qquad U \in (E_1)$$

I étant la matrice unité de (E).

2. Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} S \in (E_1) \\ S \text{ régulière} \end{array} \right| \implies S^{-1} \in (E_1)$$

III. Montrer que $(E_1, +, \times, .)$ est une sous-algèbre de (E).

IV. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & (E_1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & S & \longmapsto & \Phi(S) \end{array}$$

telle que : $S.C = \Phi(S).C$ ou $S.U = \Phi(S).U$

Montrer que $\Phi$ est un morphisme d'espace vectoriel et d'anneau.

V. Caractériser les matrices de $\operatorname{Ker}\Phi$.

Montrer que $\operatorname{Ker}\Phi$ est confondu avec l'ensemble des matrices de la forme :

$$S - \frac{\Phi(S)}{n}.U \qquad (S \in E_1)$$

VI. En déduire que $\operatorname{Ker}\Phi$ , sous-anneau de l'anneau $(E_1)$ , contient un élément neutre à droite pour la multiplication des matrices (on peut remarquer que $I \notin \operatorname{Ker}\Phi$ ). FIN